Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România — **Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”**

Filiala Galaţi — **str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi**

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”

ediţia a XV-a

Galaţi, 25 octombrie 2014

Clasa a XII-a

Problema 1.

a) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie „$*$” prin $x*y=x+y+x\cdot y$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât mulţimea $H=(a;\infty)$ să fie parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$”.

b) Se consideră funcţiile f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f^{2015}(x)+arctg\, f(x)$, cu următoarele proprietăţi:

i) f este funcţie injectivă;

ii) g are proprietatea lui Darboux.

Să se demonstreze că f admite primitive.

Problema 2..

Se consideră sistemul de ecuaţii $\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+\ldots+a_{1q}\cdot x_q=0 \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+\ldots+a_{2q}\cdot x_q=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}\cdot x_1+a_{p2}\cdot x_2+\ldots+a_{pq}\cdot x_q=0 \end{cases}$, unde $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$, $i\in\{1,2,\ldots,p\}$, $j\in\{1,2,\ldots,q\}$ şi $q=2\cdot p$.

Să se demonstreze că există o soluţie nenulă $(x_1,x_2,\ldots,x_q)$ cu componentele x_i numere întregi, iar $|x_i|\le q$, $\forall i\in\{1,2,\ldots,q\}$.

Problema 3

a) Să se determine funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care îndeplinesc simultan următoarele proprietăţi:

i) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$;

ii) Imaginea oricărui interval închis şi mărginit prin funcţia f este un interval închis şi mărginit, iar imaginea oricărui interval deschis este un interval deschis.

b) Să se determine funcţiile $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care îndeplinesc simultan următoarele proprietăţi:

i) g admite primitive;

ii) $2\cdot g\left(\frac{x+y}{2}\right)=g(x)+g(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Pentru fiecare subiect se acordă maximum 7 puncte.
Nu se acordă nici un punct din oficiu. Fiecare teză va fi evaluată cu un punctaj de la 0 la 21 puncte.
Timp de lucru : 2 ore şi 30 minute.